

§ 7. Budování určitého integrálu

Def.: Dělením D uzavřeného intervalu $\langle a, b \rangle$ rozumíme každou konečnou množinu čísel $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ takových, že $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Intervaly $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_{i-1}, x_i \rangle, \dots, \langle x_{n-1}, x_n \rangle$ nazýváme dělicími intervaly daného dělení, které označme D ($D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$).

$x_0, x_1, \dots, x_n$ nazýváme dělicími body dělení D .

Číslo $\max\{x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n\}$ nazýváme normou dělení D a označujeme $\nu(D)$.

Množinu všech dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ označujeme $\mathbf{D}(a, b)$.

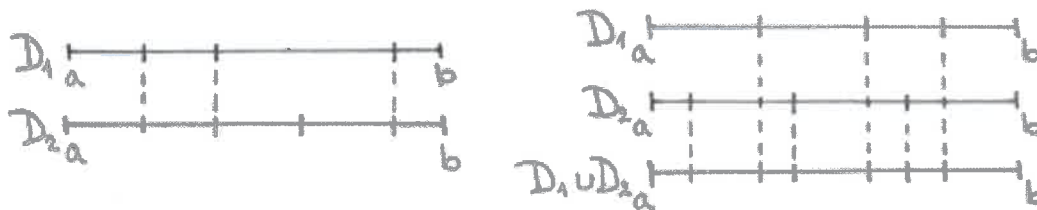


Def.: Necht $D_1, D_2 \in \mathbf{D}(a, b)$.

Řekneme, že dělení D_2 je zjemněním dělení D_1 , jestliže $D_1 \subset D_2$.

Pozn.: a) Je-li $D_1 \subseteq D_2$, pak je zřejmé, že každý dělicí interval dělení D_2 je podmnožinou některého dělicího intervalu D_1 .

b) Jsou-li $D_1, D_2 \in \mathbf{D}(a, b)$ libovolná různá dělení, pak $D = (D_1 \cup D_2) \in \mathbf{D}(a, b)$ a D je zjemněním dělení D_1 a D_2 , neboť $D_1 \subseteq (D_1 \cup D_2)$, $D_2 \subseteq (D_1 \cup D_2)$.



Def.: Necht $f(x)$ omezená $\langle a, b \rangle$, $D \in \mathbf{D}(a, b)$, $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

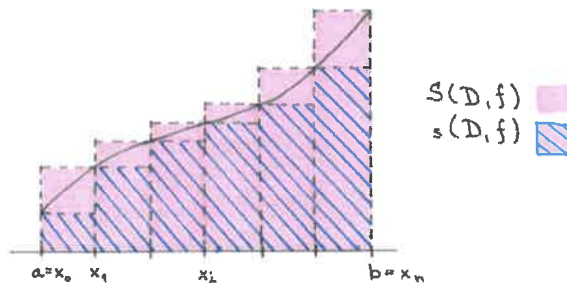
Pak množina $\{f(x), x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle\}$ je pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ neprázdná a omezená, a tedy má supremum a infimum.

Označme $m_i = \inf\{f(x), x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle\}$ pro $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

Označme $M_i = \sup\{f(x), x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle\}$ pro $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

Číslo $S(D, f) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$ nazýváme horním součtem funkce $f(x)$ příslušným dělení D

a číslo $s(D, f) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$ nazýváme dolním součtem funkce $f(x)$ příslušným dělení D .



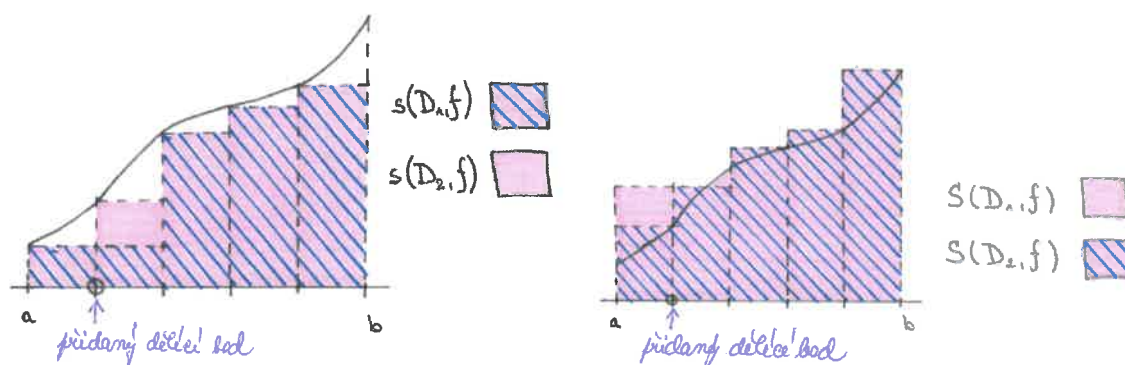
Pozn.: Necht $f(x)$ je omezená v $\langle a, b \rangle$, $D \in \mathbf{D}(a, b)$ libovolné. Pak platí: $s(D, f) \leq S(D, f)$.

[Dk.: $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí: $m_i \leq M_i$]

Pozn.: Nechť $f(x)$ je omezená v $\langle a, b \rangle$, $D_1, D_2 \in \mathbf{D}$ libovolná taková, že D_2 je zjemněním dělení D_1 . Pak platí:

$$s(D_1, f) \leq s(D_2, f)$$

$$S(D_1, f) \geq S(D_2, f)$$



Pozn.: Nechť $f(x)$ je omezená v $\langle a, b \rangle$, $D_1, D_2 \in \mathbf{D}(a, b)$ libovolná. Pak platí: $s(D_1, f) \leq S(D_2, f)$.

Věta 7.1: Nechť $f(x)$ omezená v $\langle a, b \rangle$.

Pak množina $\{s(D, f), D \in \mathbf{D}(a, b)\}$ je shora omezená a množina $\{S(D, f), D \in \mathbf{D}(a, b)\}$ je zdola omezená.

[Dk.: Podle předchozí poznámky je horní závorou množiny všech dolních součtů libovolný horní součet a dolní závorou množiny všech horních součtů je libovolný dolní součet.]

Pozn.: Z věty 7. 1. vyplývá, že množina všech dolních součtů má supremum a množina všech horních součtů má infimum.

Def.: Nechť $f(x)$ omezená v $\langle a, b \rangle$. Označme

$$\int_a^b f(x) dx = \sup\{s(D, f), D \in \mathbf{D}(a, b)\}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \inf\{S(D, f), D \in \mathbf{D}(a, b)\}$$

Číslo $\int_a^b f(x) dx$ nazýváme dolním integrálem a číslo $\int_a^b f(x) dx$ nazýváme horním integrálem funkce $f(x)$ od a do b .

Věta 7.2: Nechť $f(x)$ omezená v $\langle a, b \rangle$. Pak platí:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$$

Př.: a) $f(x) = 1, x \in \langle 0, 1 \rangle$

Pro $\forall D \in \mathbf{D}(0, 1) : s(D, f) = 1$

$S(D, f) = 1$

$$\int_0^1 f(x) dx = 1 = \int_0^1 f(x) dx$$

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \mathbb{I} \\ 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \end{cases} \quad x \in \langle 0, 1 \rangle$ — Dirichletova funkce

$\forall D \in \mathbf{D}(0, 1) : s(D, f) = 0, S(D, f) = 1$

$$\int_0^1 f(x) dx = 0 < 1 = \int_0^1 f(x) dx$$

Def.: Necht $f(x)$ omezená v $\langle a, b \rangle$.

Řekneme, že funkce $f(x)$ je v intervalu $\langle a, b \rangle$ (Riemannovsky) integrovatelná, jestliže *(integrace schéma)*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Je-li $f(x)$ v $\langle a, b \rangle$ integrovatelná, klademe

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Číslo $\int_a^b f(x) dx$ nazýváme Riemannovým integrálem funkce $f(x)$ od a do b .

Pokud $\int_a^b f(x) dx < \int_a^b f(x) dx$, pak $\int_a^b f(x) dx$ nedefinujeme a o funkci $f(x)$ řekneme, že není na intervalu $\langle a, b \rangle$ integrovatelná *(není integrace schéma)*.

§ 8. Výpočet určitého integrálu

Věta 8.1: Newton-Leibnitzova věta

Necht $f(x)$ je integrovatelná v $\langle a, b \rangle$, $F(x)$ je spojitá v $\langle a, b \rangle$. Buď $F(x)$ primitivní k funkci $f(x)$ v $\langle a, b \rangle$. Pak platí:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

[Dk.: Necht $D \in \mathbf{D}(a, b)$ libovolné, $D = a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Protože $F(x)$ je spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$, je $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})]$. $F'(x)$ existuje podle předpokladu v $\langle a, b \rangle$, tedy také v každém z intervalů $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Podle věty o střední hodnotě existuje bod $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ ($i \in 1, 2, \dots, n$) tak, že $F'(\xi_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$. Odtud máme: $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.

Tedy $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sigma(D, f, \Xi)$, kde $\Xi = \{\xi_i, i = 1, 2, \dots, n\}$. Dokázali jsme tedy, že pro $\forall D \in \mathbf{D}(a, b) \exists$ výběr reprezentantů ξ_i tak, že platí $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sigma(D, f, \Xi)$. Buď nyní $D_{n=1}^\infty$ nulová posloupnost dělení ($\nu(D_0) \rightarrow 0$) intervalu $\langle a, b \rangle$.

Označíme-li Ξ_n popsany výčet reprezentantů dělení D_n , pak platí pro každé D_n : $F(b) - F(a) = \sigma(D_n, f, \Xi_n)$. Tedy posloupnost $\{\sigma(D_n, f, \Xi_n)\}$ je konvergentní, tedy $\sigma(D_n, f, \Xi_n) \rightarrow F(b) - F(a)$.

$\sigma(D_n, f, \Xi_n) \rightarrow \int_a^b f(x) dx$. Odtud plyne, že $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$.]

Věta 8.2: Necht $f(x)$ je spojitá v $\langle a, b \rangle$. Pak je $f(x)$ v $\langle a, b \rangle$ integrovatelná.

Př.: a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx =$$

b)

$$\int_0^2 e^{3x} dx =$$

c)

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} =$$

d)

$$\int_1^2 \frac{dx}{2x+1} =$$

$$[a] \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b) \int_0^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3} [e^{3x}]_0^2 = \frac{1}{3} (e^6 - e^0) = \frac{1}{3} (e^6 - 1)$$

$$c) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctg x]_1^{\sqrt{3}} = \arctg \sqrt{3} - \arctg 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

$$d) \int_1^2 \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2} [\log(2x+1)]_1^2 = \frac{1}{2} (\log 5 - \log 3) = \frac{1}{2} \log \frac{5}{3}$$

Věta 8.3: Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné funkce v $\langle a, b \rangle$. Pak funkce $f(x) + g(x)$ je rovněž integrovatelná v $\langle a, b \rangle$ a platí:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Věta 8.4: Nechť $f(x)$ je integrovatelná v $\langle a, b \rangle$, $c \in \mathbb{R}$ libovolné číslo. Pak funkce $c \cdot f(x)$ je v $\langle a, b \rangle$ integrovatelná a platí:

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

Pozn.: Z vět 8. 3. a 8. 4. plyne Věta 8. 5.

Věta 8.5: Nechť $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ jsou funkce integrovatelné v $\langle a, b \rangle$, $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ jsou libovolná čísla.

Pak funkce $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)$ je v $\langle a, b \rangle$ integrovatelná a platí:

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)] dx = c_1 \cdot \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \cdot \int_a^b f_2(x) dx + \dots + c_n \cdot \int_a^b f_n(x) dx$$

Věta 8.6: Nechť $f(x)$ je integrovatelná a nezáporná v $\langle a, b \rangle$. Pak platí:

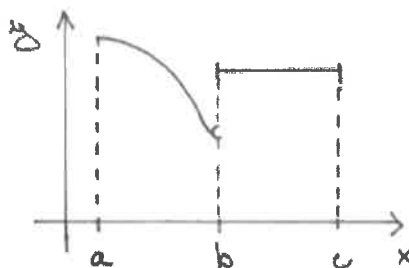
$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Věta 8.7: Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné v $\langle a, b \rangle$. Nechť pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí $f(x) \leq g(x)$. Pak platí:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Věta 8.8: Nechť $a < b < c$ jsou libovolná reálná čísla. Nechť $f(x)$ je integrovatelná v $\langle a, b \rangle$ i v $\langle b, c \rangle$. Pak je $f(x)$ integrovatelná také v $\langle a, c \rangle$ a platí:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

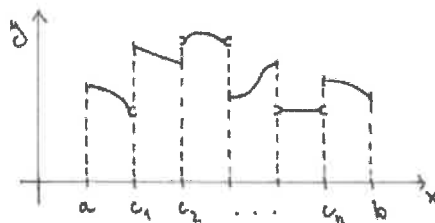


Pozn.: Tato věta nám umožňuje zodpovědět otázky, které funkce jsou integrovatelné na intervalu $\langle a, b \rangle$ a zeslabit podmínky Věty 8.2.

Věta 8.9: Nechť $f(x)$ je v $\langle a, b \rangle$ omezená a spojitá s výjimkou konečného počtu bodů $c_1, c_2, \dots, c_n$; $a < c_1 < c_2 < \dots < c_n < b$.

Pak $f(x)$ je v $\langle a, b \rangle$ integrovatelná a platí:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \dots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x) dx + \int_{c_n}^b f(x) dx$$



Def.: Funkce daná podmínkami předchozí věty se nazývá funkce po částech spojitá v $\langle a, b \rangle$.

Def.: Je-li $f(x)$ definována v čísle $a \in \mathbb{R}$, klademe

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Je-li $f(x)$ integrovatelná v $\langle a, b \rangle$, definujeme

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

Věta 8.10: O substituci pro určité integrály (využíváme tzv. transformace mezí)

Nechť $\varphi(t)$ má v $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojitou derivaci $\varphi'(t)$, $f(x)$ je spojitá v $\langle a, b \rangle$, $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$. Označme $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Pak platí:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt$$

Př.:

$$\int_1^2 \frac{x dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\left[= \left| \begin{array}{ll} t = 1+x^2 & x=1: t=1+1=2 \\ dt = 2x dx & x=2: t=1+4=5 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_2^5 \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2} \cdot 2 \left[\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \right]_2^5 = -\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right]$$

Věta 8.11: O integraci per partes pro určité integrály

Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají v intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitě derivace $u'(x), v'(x)$. Pak platí:

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

Př.:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos \frac{x}{2} dx =$$

$$\left[= \left| \begin{array}{ll} u' = \cos \frac{x}{2} & v = x \\ u = 2 \sin \frac{x}{2} & v' = 1 \end{array} \right| = 2 \left[x \sin \frac{x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} dx = 2 \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 2 \cdot 2 \left[\cos \frac{x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} + 4 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} (\pi + 4) - 4 \right]$$

§ 9. Geometrické aplikace určitého integrálu

A) Obsah plochy

Pozn.: Z definice určitého integrálu vyplývá, že je-li $f(x)$ spojitá a nezáporná v $\langle a, b \rangle$, je $\int_a^b f(x) dx$ obsah plochy (obrazce) omezeného osou x , přímkami $x = a$, $x = b$ a grafem funkce $y = f(x)$.

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Př.: Vypočítejte obsah plochy $M = \{[x, y], y \geq x^2, y \leq 2x\}$. [$\frac{4}{3}$]

Př.: Vypočítejte obsah plochy $M = \{[x, y], y \geq x^2, y \leq 1 - x^2\}$. [$\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3}$]

Př.: Vypočítejte obsah kruhu o poloměru r . [πr^2]

B) Objem tělesa

Pozn.: Nechť $M = \{[x, y, z]; x, y, z \in \mathbb{R}, x \in \langle a, b \rangle\}$ těleso a řez tělesa M rovinou v bodě x_0 má obsah $u(x_0)$. Nechť $u(x)$ je spojitá a nezáporná funkce v $\langle a, b \rangle$. Pak objem tělesa M definujeme vzorcem:

$$V_M = \int_a^b u(x) dx$$

Př.: Vypočítejte objem jehlanu, jehož výška je v a obsah čtvercové základny je z_0 . [$\frac{1}{3} z_0 v$]

B C) Objem rotačního tělesa

Pozn.: Nechť $f(x)$ je spojitá a nezáporná v $\langle a, b \rangle$, $M = \{[x, y], x \in \langle a, b \rangle, y \in \langle 0, f(x) \rangle\}$. Nechť M rotuje kolem osy x . Dostaneme tak rotační těleso, pro jehož objem plyne z předchozí poznámky:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

$$\left(\begin{array}{l} u(x_0) = \pi [f(x_0)]^2 \\ u(x) = \pi [f(x)]^2 \Rightarrow V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \end{array} \right)$$

Př.: Vypočítejte objem koule o poloměru r . [$\frac{4}{3} \pi r^3$]

C D) Délka rovinné čáry

Pozn.: Nechť funkce $f(x)$ má v $\langle a, b \rangle$ spojitou derivaci $f'(x)$. Délka grafu funkce f je

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Př.: Vypočítejte délku kružnice o poloměru r . [$2\pi r$]

Př.: Spočítejte délku oblouku $f(x) = \ln x$ na $\langle \sqrt{3}, \sqrt{15} \rangle$. [$2 + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}$]

Př.: Určete délku křivky $f(x) = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ na intervalu $x \in \langle 1, 2 \rangle$. [$\ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$]

D E) Plášť rotačního tělesa

Pozn.: Nechť $y = f(x)$ je v $\langle a, b \rangle$ spojitá i se svou derivací $f'(x)$. Pak pro plášť rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny $M = \{[x, y], x \in \langle a, b \rangle, y \in \langle 0, f(x) \rangle\}$ kolem osy x platí:

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Př.: Určete povrch koule o poloměru r .

$$[4\pi r^2]$$

Př.: $f(x) = 4 + x; x \in \langle -4, 2 \rangle, Q = ?$

$$[36\sqrt{2}\pi]$$

Př.: Určete ^{povrch} válce Q (poloměr podstavy r , výška v).

$$[2\pi r v]$$

Př.: Vypočítejte plášť rotačního kužele (poloměr podstavy r , výška v).

$$[s = \sqrt{r^2 + v^2}; S = \pi r(r + s)]$$